Cap 1 - Simulação estocástica

1.1 - Preliminares.

Simulação estocástica: Geração de amostras de v.a's em ambiente computacional e utilizá-las para obter resultados sobre as v.a's e/ou os seus parâmetros.

Usa-se quando: 1) Não existem resultados teóricos;
2) comparar os resultados assimptóticos ($n \to +\infty$) em conjuntos de dados finitos

Para gerar amostras de v.a's os simuladores usualmente:

1) Geram nº aleatórios do modelo $U(0,1)$
- na realidade ñ são nº aleatórios mas com a aparência de nºs da $U(0,1)$ - chamados de nº pseudo aleatórios

O desempenho do simulador é fortemente afetado pelo simulador de nº pseudo-aleatórios.

2) Gera-se as v.a's pretendidas (amostras) à custa de $U(0,1)$ com:
1. transformação de v.a's (2.2)
2. convolução: $Y = X_1 + X_2 + \dots X_n$ i.i.d.

↓

É importante ter uma forma rápida de deduzir a dist. de uma soma → usa-se a função geradora de momentos / probabilidades (2.3)

- transformação de v.a's e vectores aleatórios

Esta técnica é bastante útil e tem como objectivo:

Dado $X_1, \dots, X_n$ $(n \geq 1)$ com função distribuição $F_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$

$\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$ conhecida e considerando

$$Y_1 = g_1(\underset{\sim}{X})$$
$$Y_2 = g_2(\underset{\sim}{X}) \qquad 1 \leq k \leq n \quad e \quad g_1, \dots, g_k$$
$$\vdots \qquad\qquad \text{"bem comportados"}$$
$$Y_k = g_k(\underset{\sim}{X}) \qquad\qquad \text{mensuráveis}$$

objectivo: conhecer a função dist. conjunta de $(Y_1, \dots, Y_k)$

Métodos:

1) Função de dist. ou função de Probabilidade para v.a's discretas

Ex 1) (v. a. discreta)

$X \sim Poi(\lambda)$, $R_X = \mathbb{N}_0$

$Y = g(X) = (X-3)^2$, qual é a f. de prob. de Y?

$$R_Y = \{ \underset{X=3}{0}, \overset{X=1 \vee X=5}{\underset{X=2 \vee X=4}{1}}, 4, \underset{X=0 \vee X=6}{9}, \overset{X=7}{16}, \dots$$

$\{Y=0\}$ é equivalente a $\{X=3\}$

$P(Y=0) = P((X-3)^2=0) = P(X=3)$

$P(Y=1) = P(X=2) + P(X=4)$

$P(Y=4) = P(X=1) + P(X=5)$

$P(Y=9) = P(X=0) + P(X=6)$

$P(Y=16) = P(X=7)$

$P(Y=y) = P(X = 3+\sqrt{y})$, $y \geq 16$

Ex 2. (v.a. contínua) $X \sim N(0,1)$ qual é a dist. de $Y = X^2$ $R_Y \equiv \mathbb{R}^+$
técnica da F. dist.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) =$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - (1 - F_X(\sqrt{y}))$$
$$= 2F_X(\sqrt{y}) - 1$$

$$f_Y(y) = 2 f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\cancel{2}\, 1}{\sqrt{2\pi}\, \cancel{2}\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y}, \quad y > 0$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y}, \quad y > 0$$

que coincide com a f.d.p. de uma v.a. que é um $\chi^2_{(1)}$

$Y \sim \chi^2_{(1)}$

---

2) v.a. contínua – teorema da Transformação (Não Lecionado)

X é uma v.a. contínua com f.d.p. $f_X(x)$ e $Y = g(X)$ é uma v.a. contínua. Frequentemente a função g é crescente ou decrescente, neste caso é possível calcular directamente a f.d.p. Y sem pensar na f. dist. de Y.

1. Caso univariado

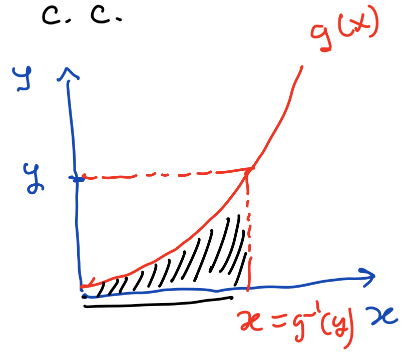
teo de transformação: Seja X uma v.a. contínua com f.d.p. $f_X(x)$. Seja $R_X = \{x : f_X(x) > 0\}$ se

i) $y = g(x)$ é uma função biunívoca de R_X em $R_Y = \{y : y = g(x), x \in R_X\}$,

ii) a derivada de $x = g^{-1}(y)$ em ordem a y é contínua e não se anula em R_Y,

então $Y = g(X)$ é uma v.a. contínua com f.d.p.

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| , & y \in R_Y \\ 0 , & \text{c. c.} \end{cases}$$

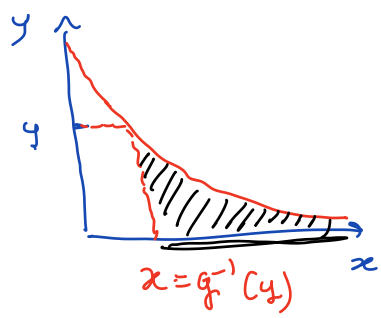


Dem: 1) $g(x)$ é crescente em R_X

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) =$$
$$= P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

Logo: $$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy}(g^{-1}(y))$$

2) Se $g(x)$ é decrescente em R_X



$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$
$$= P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Assim
$$f_Y(y) = \underbrace{-\frac{d}{dy} g^{-1}(y)}_{\substack{> 0 \text{ porque } \frac{d}{dy} g^{-1}(y) < 0 \text{ porque } g(\cdot) \text{ é} \\ \text{decrescente}}} f_X(g^{-1}(y))$$

$$\therefore \; f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \qquad //$$

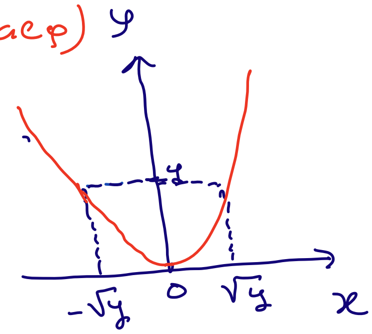
Observação: Este teo. pode ser utilizado para o caso em que a transformação não é biunívoca mas R_X pode ser decomposto num conjunto numerável de intervalos R_i nos quais a condição do teo. se verifica.

Seja $x = g_i^{-1}(y)$ a inversa de $y = g_i(x)$ para $x \in R_i$

então a f.d.p. de $Y = g(X)$ é:

$\rightarrow$ $$f_Y(y) = \sum_i f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right| , y \in R_Y$$

Ex 2. (utilizando o teo. de transformação)



$Y = X^2$, $X \sim N(0,1)$

1) $x < 0$, $R_1 =]-\infty, 0[$

$$g_1^{-1}(y) = \underline{-\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{d g_1^{-1}(y)}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

2) $x \geq 0$, $R_2 = [0, +\infty[$

$$g_2^{-1}(y) = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{d g_2^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_2^{-1}(y) \right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} \right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y} & , y > 0 \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases} \quad \therefore Y \sim \chi^2_{(1)}$$

2. Caso multivariado

Teo da transformação: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a's contínuas com f.d.p. conjunta $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$ e seja $R_{\underset{\sim}{X}} = \{\underset{\sim}{x} : f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) > 0\}$.

Se

i) $Y_1 = g_1(\underset{\sim}{X}), \ldots, Y_n = g_n(\underset{\sim}{X})$ definem uma transformação biunívoca de $R_{\underset{\sim}{X}}$ em $R_{\underset{\sim}{Y}}$

ii) as primeiras derivadas parciais de $x_1 = g_1^{-1}(\underset{\sim}{y}), \ldots, x_n = g_n^{-1}(\underset{\sim}{y})$ são contínuas em $R_{\underset{\sim}{Y}}$

iii) o Jacobiano

(determinante da matriz Jacobiana)

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}(\underset{\sim}{y})}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1^{-1}(\underset{\sim}{y})}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_n^{-1}(\underset{\sim}{y})}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n^{-1}(\underset{\sim}{y})}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

não se anula em $R_{\underset{\sim}{Y}}$, então a f.d.p. conjunta de $\underset{\sim}{Y}$ é:

$$f_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{y}) = f_{\underset{\sim}{X}}(g_1^{-1}(\underset{\sim}{y}), \ldots, g_n^{-1}(\underset{\sim}{y})) \underbrace{|J|}_{\text{módulo do Jacobiano}}, \quad \underset{\sim}{y} \in R_{\underset{\sim}{Y}}$$

1) Soma

Seja (X,Y) um vector aleatório contínuo com f.d.p. $f_{X,Y}(x,y)$.
Seja $Z = X+Y$ e vamos ver como usar o teo. para obter a f.d.p. de Z.

$$\begin{cases} z = x+y \\ w = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = z-w \\ y = w \end{cases} \qquad J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(z-w, w) \cdot \underbrace{|J|}_{1}$$

$$f_Z(z) = \int f_{X,Y}(z-w, w)\, dw$$

Se $X \perp\!\!\!\perp Y$ então $f_Z(z) = \int f_X(z-w)\, f_Y(w)\, dw$

Não Lecionado

• Funções geradoras de momentos (de probabilidades) e o seu uso no cálculo de momentos de v.a's e na identificação de distribuições

Momentos de v.a's (Indicadores para descrever aspectos das distribuições)

1) Momentos de ordem K em relação à origem (momentos ordinais de ordem K)

$\mu'_K = E(X^K)$ (pode não existir), $K = 1, 2, \ldots$

2) Momento de ordem K em relação à média ou momento central de ordem K

$$\mu_K = E[(X-\mu_X)^K] \quad \text{(pode não existir)}$$

$$\mu_2 = E(X-\mu_X)^2 = \sigma^2$$

3) Momento factorial de ordem k

$$\mu_{(k)} = E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$$

Pode simplificar o cálculo da var(X)

$$\mu_{(2)} = E[X(X-1)]$$

Funções geradoras de momentos e de prob.
(pode ser usadas para calcular prob., momentos e a dist. de somas de v.a's)

① Função geradora de probabilidades (f.g.p.)

DEF (f.g.p.) : Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p_K = P(X=K)$, $K = 0, 1, 2, \dots$ e $\sum_{K=0}^{+\infty} p_K = 1$.

A função definida como:

$$P_X(s) = P(s) = \Pi_X(s) = \Pi_s = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots = \sum_K p_K s^K = E(s^X)$$

que converge se $|s| \leq 1$ (comparação c/ a série geométrica) é designada por função geradora de prob. de X

obs: 1. a f.g.p. faz sentido para $\forall$ v.a. X que tome valores em inteiros ñ negativos. Se $\exists$ f.g.p. ela é única e determina univocamente a f.p. da v.a.

2. Como usar a f.g.p. para gerar probabilidade?

$$P_X(s) = p_0 + \underbrace{p_1 s + p_2 s^2 + \dots}_{} = \sum_K p_K s^K = E(s^X)$$

$$p_0 = P(X=0) = P(s)\Big|_{s=0}$$

$$p_1 = P(X=1) = \frac{dP(s)}{ds}\Big|_{s=0}$$

$$p_2 = P(X=2) = \frac{\frac{d^2P(s)}{ds^2}\Big|_{s=0}}{2!}$$

$$\vdots$$

$$p_K = P(X=K) = \frac{\frac{d^KP(s)}{ds^K}\Big|_{s=0}}{K!}$$

3. como utilizá-la para gerar momentos?

$$\underbrace{P_X(s)} = \underbrace{E(s^X)} = \begin{cases} \sum_k s^k p_k & (X \text{ v.a. discreta}) \\ \int_{R_X} s^k f_X(x)\,dx & (X \text{ v.a. contínua}) \end{cases}$$

$$\frac{d}{ds}P_X(s) = E[X \underbrace{s^{X-1}}]$$

$$\left.\frac{dP_X(s)}{ds}\right|_{s=1} = E(X)$$

$$\frac{d^2P_X(s)}{ds^2} = E(X(X-1)\underline{s^{X-2}}]$$

$$\left.\frac{d^2P_X(s)}{ds^2}\right|_{s=1} = E(X(X-1)] = \mu_{(2)}$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{d^kP_X(s)}{ds^k}\right|_{s=1} = E\big(X(X-1)x\ldots(X-k+1)\big) = \mu_{(k)}$$

Assim, a f.g.p. gera os momentos factoriais para $\forall$ v.a. discreta ou contínua

4. como utilizar a f.g.p. para derivar a dist. de uma soma de v.a's Indep.

Seja $(X_1,\ldots,X_n)$ n v.a's Indep e $P_{X_i}(s) = E(s^{X_i})$ é a f.g.p de X_i, $i=1\ldots,n$ e seja $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

Qual é a f.g.p. da v.a Y?

$$P_Y(s) = P_{\sum_{i=1}^n X_i}(s) = E(s^Y) = E\left(s^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n s^{X_i}\right) =$$

$$\underset{\substack{X_i \perp\!\!\!\perp X_j \\ \forall i\neq j}}{=} \prod_{i=1}^n E(s^{X_i}) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(s)$$

Se além de indep as v.a's X_i forem identicamente distribuídos

$$P_Y(s) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(s) \underset{X_i \text{ i.d. a } X}{\overset{=}{\downarrow}} (P_X(s))^n$$

Exemplo: $X \sim Poi(\lambda)$

1) obter a f.g.p. de X

2) utilizá-la para gerar prob. e momentos.

1) $P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$

f.g.p. de X $\quad P_X(s) \underset{def}{=} E(s^X) = \sum_{x=0}^{+\infty} s^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(s\lambda)^x}{x!}}$

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{s\lambda} =$$

$$= \underbrace{e^{-\lambda(1-s)}}_{\text{formulário}} \quad \text{se } s < 1$$

2) Gerar prob.

$$p_0 = P_X(0) = \left(e^{-\lambda(1-s)}\right)\Big|_{s=0} = e^{-\lambda}$$

$$p_1 = \frac{P_X(0)}{ds} = \lambda e^{-\lambda(1-s)}\Big|_{s=0} = \lambda e^{-\lambda}$$

$\vdots$

$$p_K = \frac{P^K(0)}{K!} = \frac{\left[\lambda^K e^{-\lambda(1-s)}\right]}{K!}\Bigg|_{s=0} = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$$

Gerar momentos em à origem: $E(X)$; $E(X^2)$

$$P_X(s) = E(s^X)$$

$$E(X) = \frac{dP_X(s)}{ds}\Big|_{s=1} = E(X s^{X-1})\Big|_{s=1} = \left[\lambda e^{-\lambda(1-s)}\right]\Big|_{s=1} = \lambda$$

$E(X^2) = ?$

$$\left.\frac{d^2 P_X(s)}{ds}\right|_{s=1} = E\left(X(X-1)\, s^{X-2}\right]\Big|_{s=1} = E\left[X(X-1)\right] =$$

$$= \left[\lambda^2 e^{-\lambda(1-s)}\right]\Big|_{s=1} = \lambda^2 = \underset{E(X^2)-E(X)}{E\left(X(X-1)\right]} =$$

$\therefore \; E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Dist. de soma de v.a's Poisson indep.

$X_i \sim Poi(\lambda_i)$ indep $\qquad P_{X_i}(s) = {}^{-\lambda_i(1-s)}$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P_Y(s) = E(s^Y) = E\left(s^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} s^{X_i}\right) \underset{\substack{X_i \perp\!\!\!\perp X_j \\ \forall i \neq j}}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E(s^{X_i}) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(s) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(1-s)} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1-s)}$$

f.g.p. de uma v.a. Poisson com $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$\therefore \; Y \sim Poi\left(\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

2) Função geradora de Momentos (f. g.m.)

DEF (f.g.m.) Dada uma v.a. X designa-se por f.g.m. de X a função $M_X(t) = M(t) \underset{def}{=} E(e^{tX}) =$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx & \text{v.a. contínua} \\ \sum_x e^{tx} P(X=x) & \text{v.a. discreta} \end{cases}$$

que só existe se o integral (série) for absolutamente convergente

$$M_X(0) \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ v.a. contínua}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

$\therefore$ $M_X(0)$ existe sempre. A existência numa vizinhança de 0 depende da dist. de X.

Se existir $M_X(t)$ numa vizinhança de 0 então existem as derivadas de todas as ordens em $t=0$ e estas são iguais aos momentos em relação à origem de X.

Vamos supor que X é uma v.a. contínua e $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$ e admitindo que se pode permutar as operações de derivação e integração, vem:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{tx} f_X(x)\, dx$$

Assim, $M'_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = E(X)$

$$\vdots \quad M_X^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{tx} f_X(x)\,dx$$

$$\therefore \quad M_X^{(r)}(0) = E(X^r)$$

teo: Se $M_X(t)$ de uma v.a. X é finita num aberto que contem o zero então tem derivada de todas as ordem e

$$M_X^{(r)}(t) = E(X^k e^{tX})$$

$$M_X^{(r)}(0) = E(X^k)$$

Qual a razão do nome f. g. de momentos?

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{y^i}{i!}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left[1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \dots\right] =$$

$$= 1 + t\underbrace{E(X)}_{M_X'(0)} + \frac{t^2}{2!}\underbrace{E(X^2)}_{M_X''(0)} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)\,t^k}{k!}$$

$$= 1 + M_X'(0)\,t + M_X''(0)\frac{t^2}{2!} + \frac{M_X'''(0)}{3!} + \dots =$$

Propriedades da f.g.m.

i) Como utilizar f.g.m. para gerar prob. ou momentos factoriais?

$$P_X(t) \underset{def}{=} E(t^X) = E[e^{X\ln t}] = M_X(\ln t)$$

ii) Gera momentos em relação à origem

$$E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$$

(iii) Forma mais rápida de obter $E(X)$ e $var(X) = E[(X-\mu_X)^2]$

Seja $\phi_X(t) = \ln M_X(t)$

$$\phi'(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \quad ; \quad \phi'(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{E(X)}{1} = E(X)$$

$$\phi''(t) = \frac{M''_X(t)\, M_X(t) - (M'_X(t))^2}{(M_X(t))^2}$$

$$\phi''(0) = \frac{\underbrace{M''_X(0)}_{E(X^2)}\, \underbrace{M_X(0)}_{1} - (\underbrace{M'_X(0)}_{E(X)})^2}{(\underbrace{M_X(0)}_{1})^2} = E(X^2) - E^2(X) = var(X)$$

IV) Como usar a f.g.m. para obter a dist. de uma soma de v.a's Indep.

Seja $(X_1, \dots, X_n)$ v.a's indep e $M_{X_i}(t) = E(e^{tX_i})$ f.g.m

então $M_{\Sigma X_i}(t) = E[e^{t\Sigma X_i}) = E(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}) =$

$$\underset{\text{indep}}{=} \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

Se as v.a's X_i forem identicamente distribuída com X

$$M_{\Sigma X_i}(t) = (M_X(t))^n$$

v) Como usar a f.g.m. para derivar a distribuição de uma v.a. $Y = aX + b$ (transformação de X em Localização e escala)

$a, b \in \mathbb{R}$

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{tb} \cdot e^{taX})$$

$$= e^{tb} \cdot E(e^{taX}) = e^{tb} \cdot M_X(at)$$

usa-se este resultado para obter a f.g.m. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ à custa da f.g.m. de $Z \sim N(0,1)$

Exemplos com uso de f.g.m.

Exemplo 1.

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ $\qquad f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & , c.c. \end{cases}$

a) Obter a f.g.m. de X

$$M_X(t) \underset{def}{=} E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda - t)x} \, dx = \frac{\lambda}{(\lambda - t)} \underbrace{\int_0^{+\infty} (\lambda - t) e^{-(\lambda - t)x} \, dx}_{\text{se } \lambda > 0 \text{ f.d.p. Exp}(\lambda - t)}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \text{ se } \lambda > t$$

b) se $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ onde $X_i \underset{iid}{\sim} Exp(\lambda), \forall i$

Qual a dist. de Y?

$$M_Y(t) = (M_X(t))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \quad \therefore \; Y \sim Gama(n, \lambda)$$

Se $Y \sim Gama(\alpha, \lambda)$ qual é a f.g.m. de Y?

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_0^{+\infty} e^{ty} \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)} \, dy$$

$f_Y(y) = \dfrac{\lambda^\alpha y^{\alpha - 1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)}$, $y > 0, \lambda, \alpha > 0$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-(\lambda - t)y} \, dy$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{(\lambda-t)^\alpha y^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)y}}{\Gamma(\alpha)}}_{\text{f.d.p. } G(\alpha,\lambda-t)} dy$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \qquad \text{se } \lambda > t$$

Exemplo 2. $Z \sim N(0,1)$, obter a f.g.m. de Z

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \ z \in \mathbb{R}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tz-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} dz =$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$\boxed{e^{tz-\frac{1}{2}z^2} = e^{-\frac{1}{2}(z^2-2tz)} = e^{-\frac{1}{2}(z^2-2tz+t^2)+\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2+\frac{1}{2}t^2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{f.d.p da } N(t,1)} dz$$

$$= e^{t^2/2}$$

f.g.m. $N(\mu,\sigma^2)$; $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$X = \mu + \sigma Z$

$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(\mu + \sigma Z)}) = e^{t\mu} E(e^{\sigma t Z})$

$= e^{t\mu} M_Z(\sigma t) = e^{t\mu} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$= e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}$

Obter, usando a f.g.m. de X (ou ln f.g.m), $E(X)$ e var(X)

$\phi(x) = \ln M_X(t) = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$

$\phi'(x) = \mu + \cancel{2}\frac{\sigma^2}{\cancel{2}} t = \mu + \sigma^2 t \quad ; \quad \phi'(0) = E(X) = \mu$

$\phi''(x) = \sigma^2 \qquad \phi''(0) = \sigma^2 = \text{var}(X)$